クルスカルの原理

西山豊
〒533-8533 大阪市東淀川区大隅2-2-8 大阪経済大学 情報社会学部
Tel: 06-6328-2431 E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp
「数学を楽しむ／クルスカルの原理」『理系への数学』2012 年 6 月, Vol.45, No.6, 19-23 に掲載

1．乱数を使った演出

イギリスの知人であるスティーブ・ハンブルから，アイルランドの数学教師を相手にした彼の講演を伝える Youtube が送られてきた．タイトルはランダムネス・ショーとなっていた．アイリッシュ・パブを会場にした数学の講演で，何やら楽しそうにしているのだが，英語がわからないので全容を理解するのに少し時間ががかかった．

手順は次のようである．トランプを画用紙大のサイズに拡大コピーしたものを作っておく．会場から 8 人に協力してもらう．52 枚のカードを 8 人に 6 ～ 7 枚ずつ配る．そして，床の上に図 1 のようにランダムに並べてもらう．トランプは 52 枚だから，横 8 列にすると縦 6 行となり，4 枚のカードが余るが，7 行目の左詰めに置くことにする．横 8 列に並んだ先頭行の前に 8 人に並んでもらう．1 番目の人はクラブの 9（♣9）の前，2 番目の人はハートの 6（♡6）の前，…，8 番目の人はダイヤの 5（◇5）の前というように並ぶ．

さて，トランプの数字に従って移動することにする．1 行目は右方向に，2 行目は左方向にというように右左右左…のジグザグの 1 本道を進むことにする．たとえば，1 番目の人はクラブの 9（♣9）であるから，右方向に 9 つ進むことにする．7 つ進んだところでカードがなくなるので，折り返して左方向に移動するとすれば，ダイヤの Q（◇Q）になる．ここで，ジャック（J）やクイーン（Q），キング（K）の絵柄のカードは 1 つだけ進むこととする．それで，1 つ進んでダイヤの 9（◇9）となる．このようにして，トランプに書かれた数字だけ進むことにすれば，

♣9, ◇Q, ◇9, ♠3, ♡4, ♣8, ◇J, ♣A, ♠8, ♣6. ♡5

のような進み方をして，最下行（7 行目）のハートの 5（♡5）までたどり着くことになる．ハートの 5（♡5）では 5 つ進むはずだが，カードが残り 1 枚しかないので，この位置にとどまっていることとする．

1	2	3	4	5	6	7	8
♣ 9	♡ 6	◇ A	♣ 4	♣ K	♡ 9	◇ 6	◇ 5
♡ Q	♣ 2	♣ 5	◇ 4	♣ J	◇ 9	◇ Q	♠ 4
♡ J	♣ Q	♠ 9	♠ 3	♠ 10	♠ 2	♡ 4	◇ 8
◇ 10	♠ 5	♠ J	♠ A	♡ 8	♣ 8	♣ 7	♠ Q
♣ 3	◇ 2	◇ J	♣ A	♠ 8	◇ 3	♡ 7	♠ 6
♡ K	♠ K	♡ 3	♣ 6	♡ A	♣ 10	♡ 2	◇ 7
◇ K	♡ 10	♡ 5	♠ 7				

図 1．8 枚のカードは同じカードにたどり着く．

8 人の協力者に以上のルールを説明して，床に並べたカードの上を歩いてもらう．歩き出すのは，1 番目の人から始めるのではなく，8 番目の人から始め，次に 7 番目の人としたほうが，流れがスムーズになる．図 1 において，先頭行にいる 8 人を No.1～No.8 として進むカードの位置を示すと次のようになる．

＊＊＊

No.1 ♣9 ♢Q ♢9 ♠3 ♡4 ♣8 ♢J ♣A ♠8 ♣6 ♡5
No.2 ♡6 ♢5 ♢4 ♡J ♣Q ♠9 ♡8 ♣A ♠8 ♣6 ♡5
No.3 ♢A ♣4 ♢5 ♢4 ♡J ♣Q ♠9 ♡8 ♣A ♠8 ♣6 ♡5
No.4 ♣4 ♢5 ♢4 ♡J ♣Q ♠9 ♡8 ♣A ♠8 ♣6 ♡5
No.5 ♣k ♡9 ♣2 ♡J ♣Q ♠9 ♡8 ♣A ♠8 ♣6 ♡5
No.6 ♡9 ♣2 ♡J ♣Q ♠9 ♡8 ♣A ♠8 ♣6 ♡5
No.7 ♢6 ♢4 ♡J ♣Q ♠9 ♡8 ♣A ♠8 ♣6 ♡5
No.8 ♢5 ♢4 ♡J ♣Q ♠9 ♡8 ♣A ♠8 ♣6 ♡5

＊＊＊

8 人は，最初はバラバラの位置にいるが，52 枚のカードの上を歩き始めると，同じような経路をたどり，最後には 8 人全員がハートの 5（♡5）に到達する．つまり，スタート時点では別々（他人）であったが最後は同じところに来る（新しい友達となる）．1 枚のカードの上に 8 人がひしめき合っている光景はなかなか楽しそうだ．

We get new friends!

2．93%の確率で同じカードにたどりつく

このように，同じカードにたどり着くのは偶然と思うかもしれないが，確率を計算してみると 93%という高い確率でこの事象がおこることがわかる．読者はまずトランプでこの不思議な現象が起こることを確かめてから，確率を考えてみるとよい．

図 1 では，8 人が同じカードにたどり着くことを示したが，8 人全員とするとこの確率計算は少し複雑になるので，任意の 2 人が同じカードにたどり着く場合の確率を考えてみる．S.ハンブルによる計算方法をみてみよう[1]．最初に先頭行の 1 から 8 のどれかのカードの位置にいるので，進む数が 1 から 8 までであり，その平均は

$$m = (1+2+3+\cdots+8)/8 = 4.5$$

となる．

そして，その位置にあるカードの数にしたがって進む．数字が 1 なら 1，数字が 2 なら 2，数字が 10 なら 10，絵札のジャック(J)とクイーン(Q)，そしてキング(K)は 1 つだけ進むので，平均して

$$m = (1+2+3+\cdots+10+1+1+1)/13 = 4.46$$

進むことになる． m の逆数をとって $p = \dfrac{1}{m}$ とする． p は平均の m だけ進む確率となる．この式の意味については後述する．

さて，

$$p = \frac{1}{4.46}$$

として，同じカードにたどりつく確率を求めてみよう．カードは全部で 52 枚あるが，最初にカードを選ぶことで，平均 4.5 だけ進んだことになるので，残りは，

$$52 - 4.5$$

である．そして，この残りのカードの上を，平均 4.46 枚のペースで進むことになるので，

$$(52-4.5)/4.46 = 10.65$$

回の，カードをジャンプする機会があると考えられる．ここで，計算を簡単にするため 10 回のジャンプとしておこう．

最初の１から８までの数字を選ぶ段階で，２ 人が一致する確率は$\dfrac{1}{8}$で，一致しない確率は余事象の$\dfrac{7}{8}$である．カードの数字を見ながら進む段階で，２ 人が一致する確率は $p=\dfrac{1}{4.46}$ で，一致しない確率は余事象の $1-p=1-\dfrac{1}{4.46}$ である．最初の数字を選ぶ段階，カードの数字を見ながら進む 10 回の段階で，ことごとく一致しない確率は，

$$\left(\frac{7}{8}\right)\left(1-\frac{1}{4.46}\right)^{10}\approx 0.07 \qquad (1)$$

となる．余事象をとると

$P=1-0.07=0.93$

となる．52 枚のカード上を移動する間に，少なくとも一回は一致する確率は 0.93 となる．つまり 93％の確率で一致するというのである．

この確率計算の理論値は，パソコンによるシミュレーション結果とよくあっていた．

S. ハンブルは，大雑把な計算として(1)式を示したが，厳密に考えると，左辺の式は，少し矛盾しているように思える． １から８までの数字を選ぶ段階では，平均して $m=4.5$ 進んでいるのであるから，この段階でも

$$p=\frac{1}{m}=\frac{1}{4.5}$$

として確率 p を求め，

$$\left(1-\frac{1}{4.5}\right)\left(1-\frac{1}{4.46}\right)^{10}\approx 0.06 \qquad (2)$$

とすべきではないだろうか．ただし，式を変えても確率の値はそれほどの変化はなかった．

以上は，２ 人が一致する確率を求めたが，参加したのは８人である．８人のうち任意の２人が一致する確率が 93％であるので，８人がどこかで一致する確率は 93％より，さらに大きくなることが予想できる．

３．数の平均ｍと確率ｐの関係

進む数の平均 m と確率 $p=1/m$ の関係は次のように考えるとよい．数字が $\{1\}$ だけのカードで構成されていたら，進む数の平均は $m=1$ であり，その逆数をとった確率は $p=1/m=1$ であり，１の確率で次のカードに移動することになり，これは自明である．

$$m=1,\ p=\frac{1}{m}=1$$

数字が $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ の７個で構成されている場合を考えてみよう． ７個の数字は均等に表れるので，平均をとると，

$m=(1+2+3+4+5+6+7)/7=4$

となる．平均して４つ進むと考えることができる．この場合の確率は，

$$p=\frac{1}{m}=\frac{1}{4}$$

となる．

$\{1,2,3,4,5,6,7\}$ の中の $\{i\}$ へ移動する確率を p_i とするとき， １から７までへの移動は，それぞれ等確率

であり，

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = \frac{1}{7} \quad (*)$$

$$\sum_{i=1}^{7} p_i = 1$$

となる．確率分布は図２の f1 である．

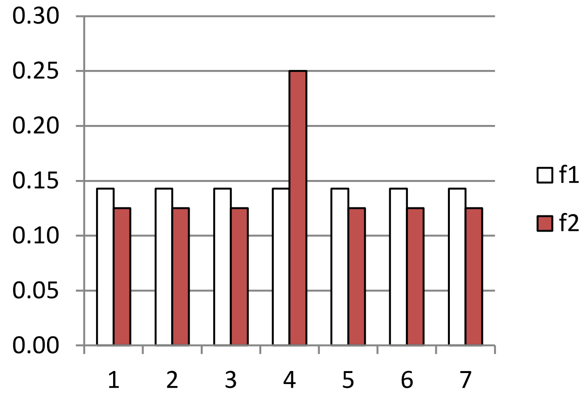

図２．普通の確率分布（f1）と「平均」を用いた確率分布(f2)

一方，移動の「平均」を考える場合の確率は，どのように考えるとよいのだろうか．これは，移動する場所が $\{4\pm 0\}, \{4\pm 1\}, \{4\pm 2\}, \{4\pm 3\}$ の４か所があり，それぞれの確率が $p=\frac{1}{4}$ であるとすると，うまく説明がつく．$\{j\}$ へ移動する確率を $p\{j\}$ とするならば,

$$p\{4\pm 0\} = p\{4\pm 1\} = p\{4\pm 2\} = p\{4\pm 3\} = \frac{1}{4}$$

であり，これを７個の数字に展開すると,

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_5 = p_6 = p_7 = \frac{1}{8},\ p_4 = \frac{1}{4} \quad (**)$$

$$\sum_{i=1}^{7} p_i = 1$$

となる．確率分布は図２の f2 である．

f1 と f2 のどちらも確率の総和が１となるが，(*)式と(**)式では，確率分布が少し違ってくるが，これ以後は，「平均」の考え方で確率を説明していく．

また，$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ の平均値を μ，標準偏差を σ とすると，

$\mu = 4, \sigma = 2$

となり，この値を用いて正規分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

を求めることができる（図３）．$x=4$ における確率が $f(4)=0.20$ となり，オーダー的に図２の p_4 に近い値となるが, 正規分布は確率変数を $-\infty < x < \infty$ としたもので, 図２の f1 や f2 と確率分布はかなり違ってくる．

ここでは正規分布は用いないこととする．

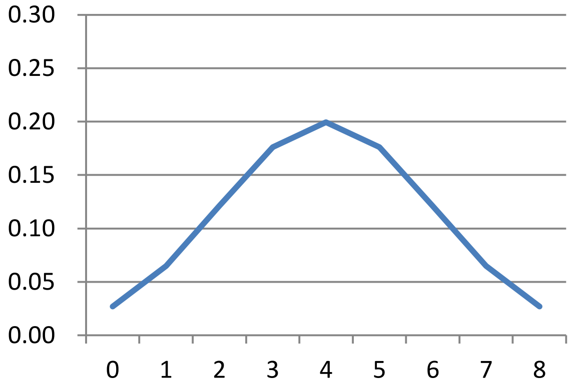

図３．正規分布

４．クルスカルの原理

さて，このカード・マジックはクルスカル・カウントとよばれるものをS.ハンブルが応用したものであるらしい．クルスカルとは，物理学者マーチン・クルスカル（1925-2006）のことで，専門の研究以外に，このような功績も残している．「クルスカルの計数（The Kruskal Count）」と呼ばれたり，「クルスカルの原理（The Kruskal Principle）」と呼ばれたりしている．これを紹介する初期の記事としては，マーチン・ガードナーの「サイエンティフィック・アメリカン」誌に掲載されたものがある[2]．邦訳されたものではジュリアン・ハヴィルのものがある[3]．

本格的な学術論文としては，ジェフリー・C・ラガリアスらの「クルスカル・カウント」という22ページの分厚い英語論文がある[4]．それで，この英語論文にしたがい確率計算を概観してみよう．ここで紹介されている計算方法は，S.ハンブルが示した計算式（1）とは少し違う．まず，その結果を示そう．

絵札の数字を１と同等とすると，進む数の平均は

$$m=(1+2+3+\cdots+10+1+1+1)/13=4.46$$

となり，確率は

$$p=\frac{1}{m}=\frac{1}{4.46}=0.22$$

となる．ここまでは同じである．N枚（=52）のカードのどこかで一致する確率は，

$$P=1-(1-p^2)^N=1-\left(1-\left(\frac{1}{4.46}\right)^2\right)^{52}\approx 0.931 \quad (3)$$

となる（J. C. ラガリアスらによる）．

(3)式を理解するため図４のような２つの系列を用意した．トランプを２セット用意して，それぞれが独自に数を読み取って進むことにする．確率過程で，未来の挙動が現在の値だけで決定され，過去の挙動と無関係であることをマルコフ連鎖（Markov chain）という．カードの数字をみて，その数だけ進むというのはまさにマルコフ連鎖である．系列１と系列２はマルコフ連鎖が２つということになる．

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
系列1	8	A	A	7	8	10	5	3	5	4	J	8	A
	*								*				
系列2	K	10	3	J	5	A	J	A	K	10	4	A	8
	*	*										*	*

	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
系列1	2	J	6	4	J	7	3	5	K	7	8	10	9
	*		*						*	*			
系列2	9	9	2	8	K	5	7	6	7	6	7	5	10
								*					

	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
系列1	7	4	Q	4	10	3	9	3	6	9	2	K	Q
				*				*			*		*
系列2	7	A	9	9	4	8	Q	2	Q	Q	3	8	10
	*							*		*	*		

	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
系列1	2	A	6	2	K	10	9	6	J	5	Q	Q	K
	*		*						*	*			
系列2	3	2	4	J	K	6	Q	J	4	3	5	2	6
	*			*	*	*						*	

図４．２つの系列での一致

系列１は１枚目のカード８を読み，８つ進んで９枚目のカード５に移動する．そして５つ移動して 14 枚目のカード２に移動する．系列１は 8, 5, 2, 6, …のように進み，系列２は K, 10, A, 8, …のように進む．アスタリスク (*) はジャンプしたカードの場所である．この２つの系列が 52 枚のカード上をそれぞれ進むとき，同じ番号の位置にくる確率はどれくらいであろうか．それが，今回の確率問題である．図４の場合は，先頭から 34 番目の位置で，系列１と系列２が一致している．

１枚目のカードの数字を見て，２枚目のカードの位置にジャンプする確率は p である．系列１と系列２がともに２枚目の位置にきて，この位置で一致する確率は，

$$p \times p = p^2$$

となり，２枚目で一致しない確率は余事象をとって，

$$1 - p^2$$

となる．

系列１と系列２が，１回目から $i-1$ 回目の試行では一致せず，i 回目の試行で初めて一致するという確率分布は幾何分布（Geometric distribution）として知られている．今回の問題は，１回目の試行で初めて一致する確率と，２回目の試行で初めて一致する確率と，…，N 回目の試行で初めて一致する確率の総和（幾何分布の積分）となるが，余事象の考えを用いると計算が楽である．

系列１と系列２が，１回目の試行でも一致せず，２回目の試行でも一致せず，…，N（=52）回目の試行でも一致しない確率を求めてみる．それは，

$$\left(1 - p^2\right)^N$$

である．そして，すくなくとも１回は，どこかの試行で初めて一致する確率は，上記の余事象であり，

$$P = 1 - \left(1 - p^2\right)^N$$

となる．このような考えで導入したのが J. C. ラガリアスらによる（3）式である．

前述した，S.ハンブルの計算方法は，(1) 式を応用すると

$$P = 1 - (1-p)^{\frac{N}{m}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{4.46}\right)^{\frac{52}{4.46}} \approx 0.948 \qquad (4)$$

となる．m は数字の平均で，$p=1/m$ とする．N をカードの総数とし，これを m で割ると，カードの数を読み取ってジャンプする回数となる．図４ではアスタリスク（*）の数で，この回数は約 12 回である．平均 m 枚進む間に, そのどこかで２つの系列が一致する確率は p である. 一致しない確率は余事象の $(1-p)$ であり, これらがジャンプする回数のうちで, 一度も一致しない確率を求め, その余事象をとったのが (4) 式である.

(3) 式と(4) 式は，一見すると違った公式であるが，確率を違う立場で求めたものであり，数値を代入するとこの２つは同じ値をもつことがわかる.

また，クルスカルの原理は，エルゴード仮説とも関係している．確率過程において，空間平均が時間平均に等しいという，気体の分子運動を確率で理解しようとして生まれた考えがエルゴード仮説であるが，カード･マジックの背景に深い理論がひそんでいるということである. 詳しくは専門書にゆだねることにしたい.

参考文献

[1] Steve Humble, Magic Card Maths, The Montana Mathematics Enthusiast, Vol.5, No.2&3, 327-336, (2008).

[2] Martin Gardner, Mathematical Games, Scientific American, Vol. 238, No. 2, (February 1978).

[3] ジュリアン・ハヴィル，松浦俊輔訳『世界でもっとも奇妙な数学パズル』青土社，2009 年

[4] Jeffrey C. Lagarias, Eric Rains, Robert J. Vanderbei, The Kruskal Count, Cornell University Library, (2001).

（にしやまゆたか／大阪経済大学）